FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE
FAKULTÄT

Wirtschaftsmathematik an der FAU

Lehreinheit Mathematik - Data Science

Digitale Studieninfotage, 10. Juni 2022

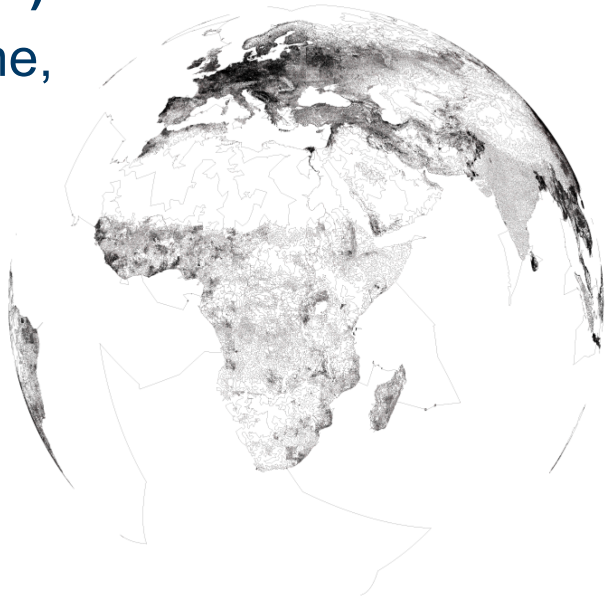
Dr. Dieter Weninger

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE
FAKULTÄT

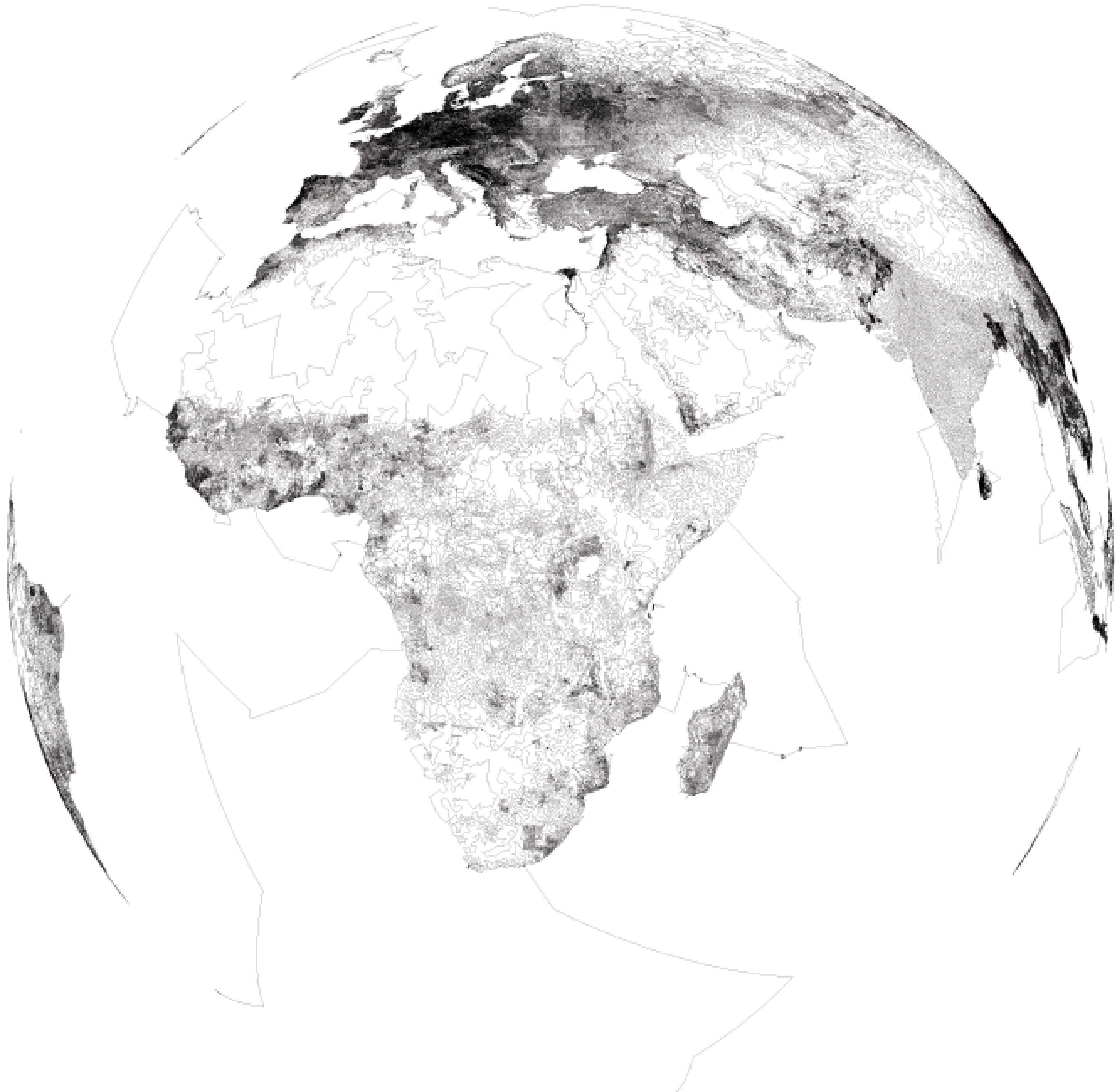
Wirtschaftsmathematik

Das Problem des Handlungsreisenden (TSP)

- Das TSP zählt zu den Top Ten der Probleme, die in den vergangenen 200 Jahren von angewandten Mathematikern untersucht wurden
- Fragestellung: Finde kürzeste bzw. günstigste Städterundreise
- 1954: Probleme mit bis zu 54 Städten optimal gelöst
- Weltrekord 2006: 85.900 Städte optimal
- World-TSP: 1.904.711 Städte, Lösung <0.25% von der optimalen Tour (12 CPU days)



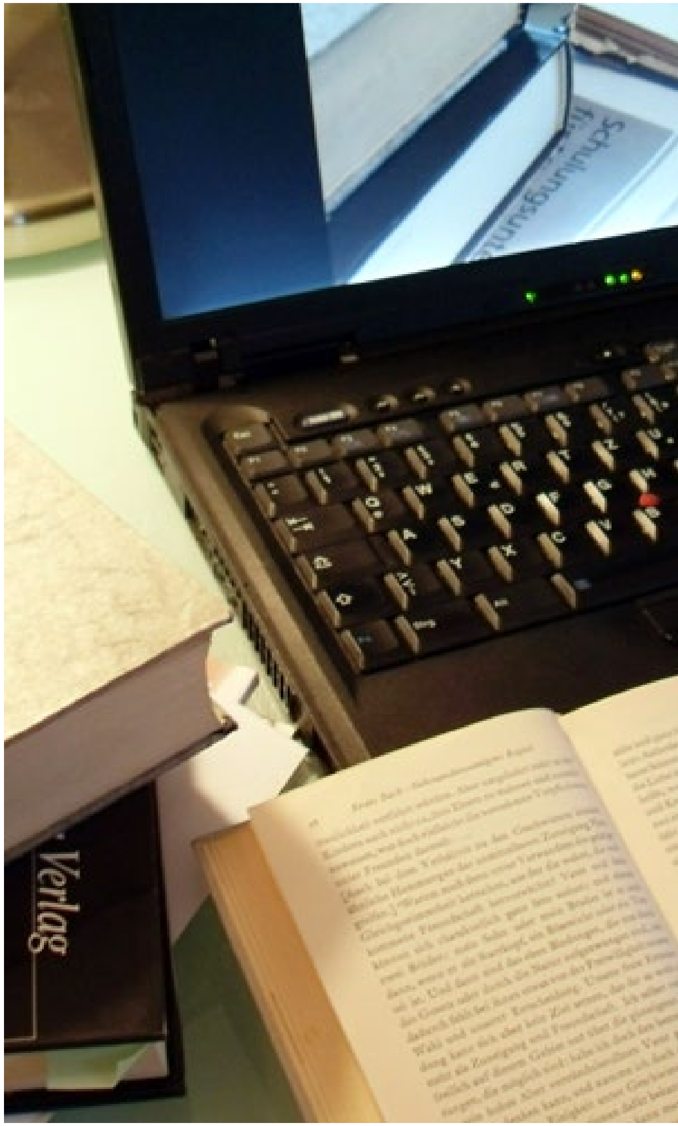
Source: https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/world/images/world30.html



Wirtschaftsmathematik

Vermittlung vielfältiger Fähigkeiten im Studium

- Kompetenzen in der Mathematik
  - Problemanalyse
  - Modellierung
  - Stochastik/Optimierung
  - Algorithmen
- Anwendungsfächer
  - Wirtschaftswissenschaften
  - Informatik
- Schnittstellenkompetenzen
  - Sprache des Anwenders



Wirtschaftsmathematik

Soft Skills

- Teamwork
- Projektarbeit
- Networking
- Interdisziplinäres Arbeiten
- Präsentation von Ergebnissen
- Argumentieren

Wirtschaftsmathematik

Zukunftschancen

- Finance & Insurance
- Software Development
- Mobilfunk & Telekommunikation
- Automobilindustrie, See-, Luft- und Raumfahrt
- Data Science & Analytics, Statistik
- Consulting
- Medizintechnik
- Energiewirtschaft
- Transport und Logistik

FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT

Studienverlauf

Inhalte

- Analysis und Lineare Algebra
- Kombinatorische und Lineare Optimierung
- Stochastik und Statistik
- Betriebswirtschaft und Ökonomie
- Grundlagen der Informatik
- Big Data Analysis und Machine Learning

Studienverlauf: Curricular-Übersicht

Nebenfach Informatik (INF)
15 ECTS-Punkte

Bachelorseminar und Bachelorarbeit (BA)
15 ECTS-Punkte

Querschnittsmodul und Seminar (QMS)
15 ECTS-Punkte

Schlüsselqualifikationen (SQ)
10 ECTS-Punkte

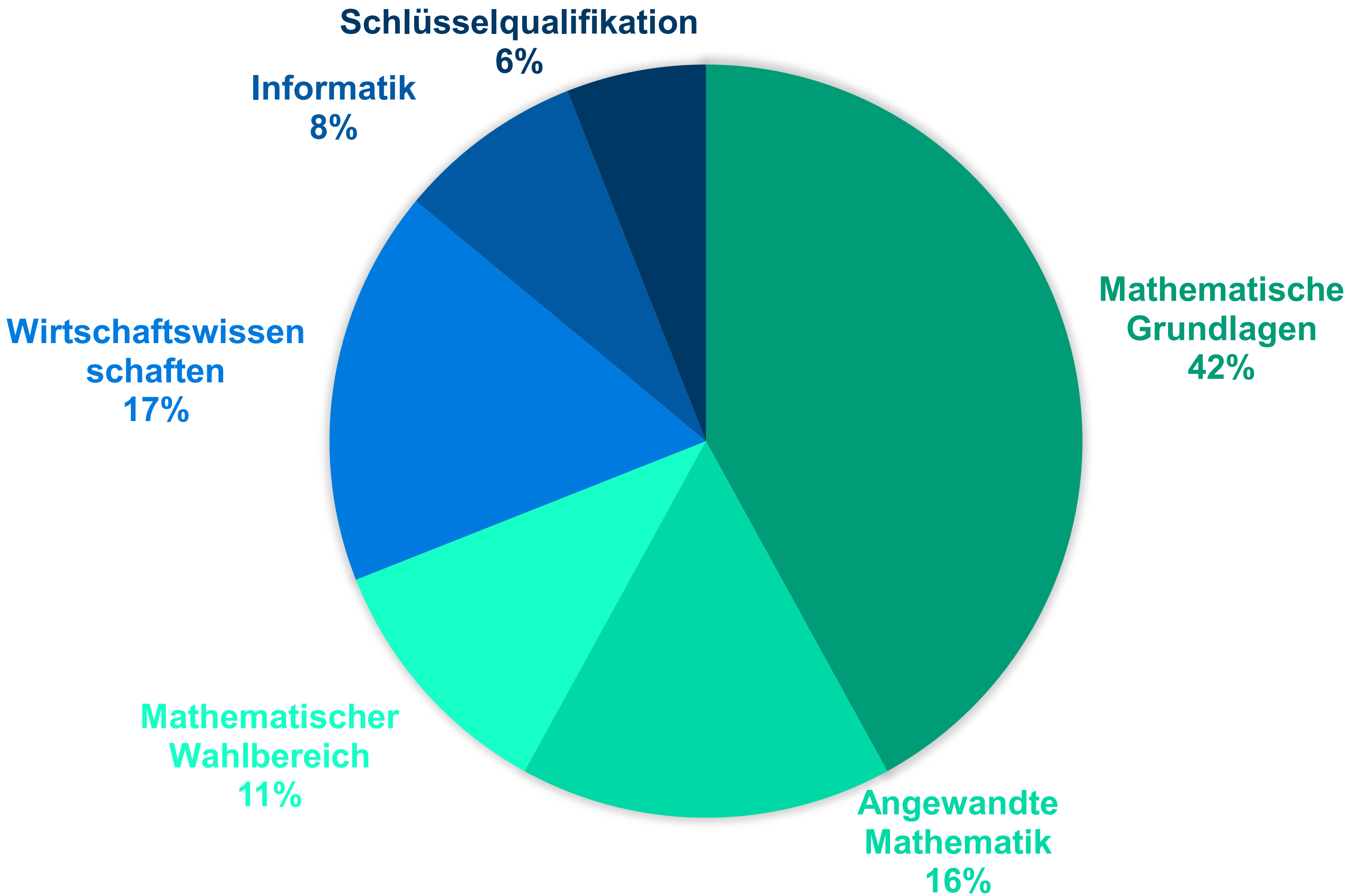
Mathematische Wahlpflichtmodule (MW)
15-25 ECTS-Punkte

Aufbaumodule Stochastik u. Optimierung (ASO)
20-30 ECTS-Punkte

Grundlagenmodule Mathematik (GM)
50 ECTS-Punkte

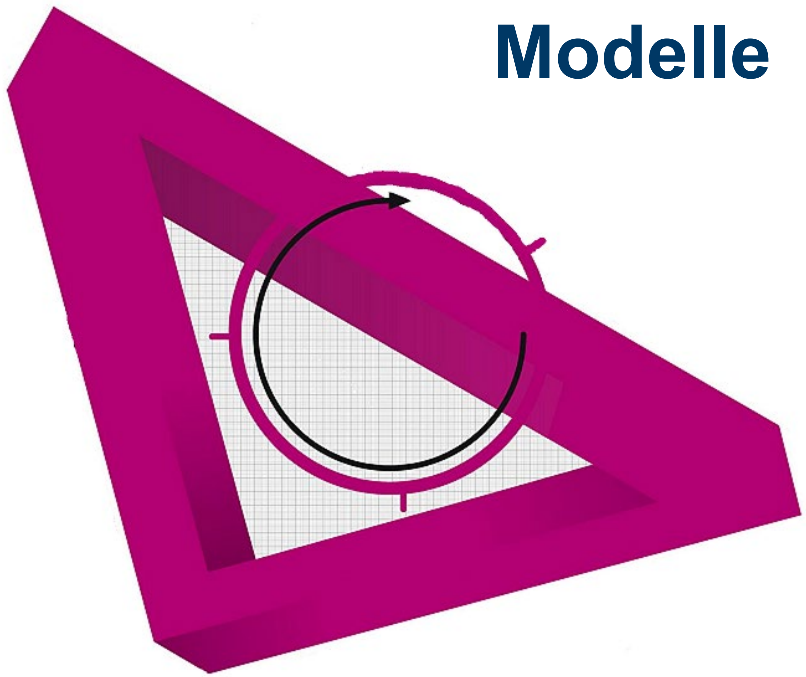
Nebenfach
Wirtschaftswissenschaften (WNF)
30 ECTS-Punkte

Studienverlauf: Anteile

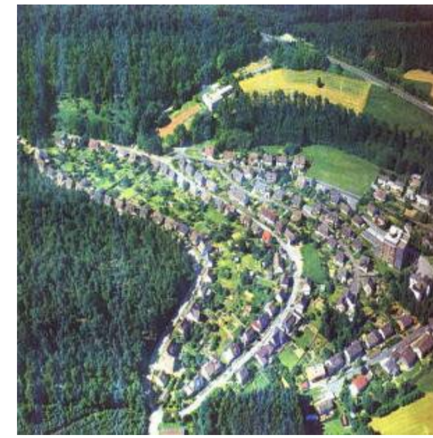


Mathematische Herangehensweise

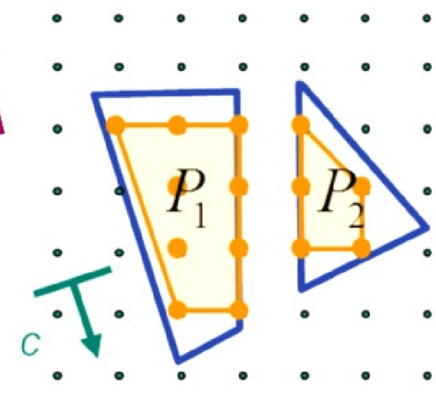
Anwendung



Modelle



Methoden



Was ist Optimierung? Wikipedia sagt…

…Verbesserung eines Vorganges oder Zustandes bezüglich eines Gesichtspunktes wie z.B. Qualität, Kosten, Effizienz…

…beschäftigt sich damit, optimale Parameter eines meist komplexen Systems zu finden. „Optimal“ bedeutet, dass eine Zielfunktion minimiert oder maximiert wird…

…dass solange nach Alternativen gesucht wird, bis eine möglichst gute Lösung für ein Problem gefunden wird…

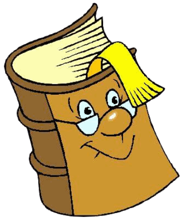
…Erreichen des besten erreichbaren Resultats im Sinne eines Kompromisses zwischen verschiedenen Parametern oder Eigenschaften…

Beispiel: Das Rucksackpackproblem

- Rucksack soll mit Ausrüstungsgegenständen bepackt werden
- **Problem**: Platz im Rucksack beschränkt
- **Frage**: Welche Gegenstände nehme ich mit?

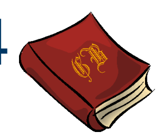
Beispiel: Vorbereitung auf eine Klausur

- Klausur steht vor der Tür und einige Bücher sind noch zu lesen
- **Problem**: Die verbleibenden Lerntage reichen nicht mehr
- **Frage**: Welche Bücher soll man zur optimalen Vorbereitung noch lesen?



Klausurvorbereitung: Daten

Budget: b = 12

i	1 	2 	3 	4 	5 	6 
c_i	7	5	9	4	2	1
a_i	4	3	6	3	3	2

Klausurvorbereitung: Modellierung

- Variablen:

  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in [0,1]$

- Nebenbedingung:

  $4x_1 + 3x_2 + 6x_3, + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 \leq 12$

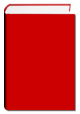
- Zielfunktion:

  $z = \max 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 1x_6$

Wie löst man das Problem?

Lösungsmethode für die Klausurvorbereitung

Sortieren nach „Wert pro Gewicht“:

i	1 	2 	3 	4 	5 	6 
c_i	7	5	9	4	2	1
a_i	4	3	6	3	3	2
$\frac{c_i}{a_i}$	1,75	1,67	1,5	1,33	0,67	0,5

Lösungsmethode für die Klausurvorbereitung

„Einpacken“ gemäß Reihenfolge:





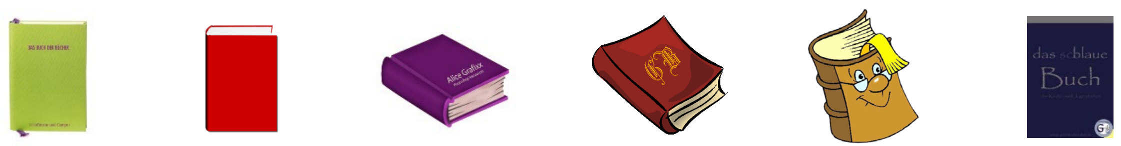

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0$$

Kapazität: $4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \leq 12$

Zielfunktion: $z = 7 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$

Lösungsmethode für die Klausurvorbereitung

„Einpacken" gemäß Reihenfolge:



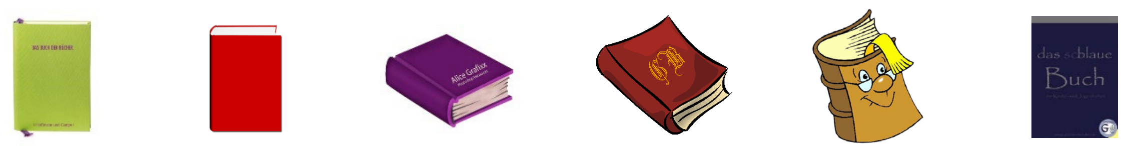
$$x_1 = 1,\; x_2 = 0,\; x_3 = 0,\; x_4 = 0,\; x_5 = 0,\; x_6 = 0$$

Kapazität: $4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 4 \leq 12$

Zielfunktion: $z = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 7$

Lösungsmethode für die Klausurvorbereitung

„Einpacken“ gemäß Reihenfolge:



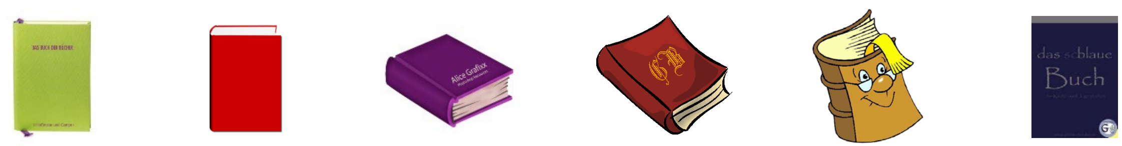
$$x_1 = 1,\; x_2 = 1,\; x_3 = 0,\; x_4 = 0,\; x_5 = 0,\; x_6 = 0$$

Kapazität: $4\cdot1 + 3\cdot1 + 6\cdot0 + 3\cdot0 + 3\cdot0 + 2\cdot0 = 7 \leq 12$

Zielfunktion: $z = 7\cdot1 + 5\cdot1 + 9\cdot0 + 4\cdot0 + 2\cdot0 + 1\cdot0 = 12$

Lösungsmethode für die Klausurvorbereitung

„Einpacken" gemäß Reihenfolge:



$$x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0{,}83,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0$$

Kapazität: $4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 6 \cdot 0{,}83 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 12 \leq 12$

Zielfunktion: $z = 7 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 9 \cdot 0{,}83 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 19{,}5$

Optimalität?

$z = \max 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 1x_6 \leq \mathbf{?}$

Für gültige Lösung gilt immer: $x_1 \leq 1$, $x_2 \leq 1$,….

Idee: Wenn $x_1 \leq 1$, dann ist $7x_1 \leq 7$, wenn $x_2 \leq 1$, dann ist $5x_2 \leq 5$, wenn beides, dann ist $7x_1 + 5x_2 \leq 7 + 5$

Führt man den Gedanken weiter, erhält man

$$7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 1x_6 \leq \mathbf{?}$$

$$7*1 + 5*1 + 9*1 + 4*1 + 2*1 + 1*1 = 28$$

Optimalität…

$$z = \max 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 1x_6 \leq \textbf{?}$$

$$\begin{array}{rcll}
4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 & \leq & 12 & \cdot 1 \\
x_1 & \leq & 1 & \cdot 3 \\
x_2 & \leq & 1 & \cdot 2 \\
x_3 & \leq & 1 & \cdot 3 \\
x_4 & \leq & 1 & \cdot 1 \\
x_5 & \leq & 1 & \cdot 0 \\
x_6 & \leq & 1 & \cdot 0 \\
\hline
7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 & \leq & 21 &
\end{array}$$

Optimalität…

$$z = \max 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 1x_6 \leq \textbf{?}$$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcll}
4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & + & 3x_4 & + & 3x_5 & + & 2x_6 & \leq 12 & \cdot 1 \\
x_1 & & & & & & & & & & & \leq 1 & \cdot 3 \\
& & x_2 & & & & & & & & & \leq 1 & \cdot 2 \\
& & & & x_3 & & & & & & & \leq 1 & \cdot 3 \\
& & & & & & x_4 & & & & & \leq 1 & \cdot 1 \\
& & & & & & & & x_5 & & & \leq 1 & \cdot 0 \\
& & & & & & & & & & x_6 & \leq 1 & \cdot 0 \\
\hline
7x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & + & 4x_4 & + & 3x_5 & + & 2x_6 & \leq 21 &
\end{array}$$

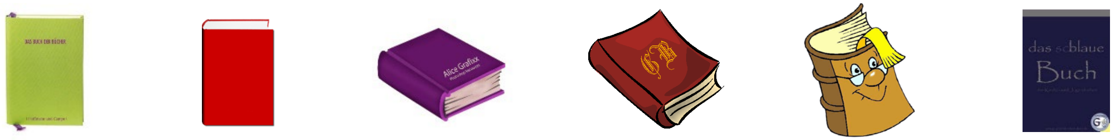
Ziel: So klein wie möglich

Optimalität…

$$z = \max 7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 1x_6 \leq \textbf{?}$$

$$
\begin{array}{llll}
4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 & \leq 12 & \cdot 1{,}5 \\
x_1 & \leq 1 & \cdot 1 \\
x_2 & \leq 1 & \cdot 0{,}5 \\
x_3 & \leq 1 & \cdot 0 \\
x_4 & \leq 1 & \cdot 0 \\
x_5 & \leq 1 & \cdot 0 \\
x_6 & \leq 1 & \cdot 0 \\
\hline
7x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 4{,}5x_4 + 4{,}5x_5 + 3x_6 & \leq 19{,}5 &
\end{array}
$$

Optimale Lösung zur Klausurvorbereitung



$x_1 = 1,\ \ x_2 = 1,\ x_3 = 0{,}83,\ x_4 = 0,\ \ x_5 = 0,\ \ x_6 = 0$

Kapazität: $4\cdot 1 + 3\cdot 1 + 6\cdot 0{,}83 + 3\cdot 0 + 3\cdot 0 + 2\cdot 0 = 12 \leq 12$

Zielfunktion: $z = 7\cdot 1 + 5\cdot 1 + 9\cdot 0{,}83 + 4\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 = 19{,}5$

Gleicher Wert…

FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE
FAKULTÄT

Beispiel: Energieversorgung einer Siedlung

- Neubausiedlung soll mit Energie versorgt werden
- Verschiedene Ausbaustufen stehen zur Verfügung
- **Problem**: Beschränktes Budget
- **Frage**: Welche Ausbaustufen sollen gewählt werden?






FRIEDRICH-ALEXANDER
UNIVERSITÄT
ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE
FAKULTÄT

Energieversorgung: Daten

Budget: b = 12

i	1 	2 	3 	4 	5 	6 
c_i	7	5	9	4	2	1
a_i	4	3	6	3	3	2

Zielfunktion: $z = \max 7x_1 + 5x_2 + 9x_3, + 4x_4 + 2x_5 + 1x_6$

Energieversorgung: Lösung?

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0{,}83$, x_4, x_5, $x_6 = 0$
bedeutet….

Halbe Kraftwerke?

Energieversorgung: Lösungsmethode

Idee: Abrunden, dann auffüllen

i	1 	2 	3 	4 	5 	6 	Σ
c_i	7	5	9	4	2	1	12
a_i	4	3	6	3	3	2	7
x_i	1	1	0	0	0	0	

Energieversorgung: Lösungsmethode

Idee: Abrunden, dann auffüllen

i	1 	2 	3 	4 	5 	6 	Σ
c_i	7	5	9	4	2	1	16
a_i	4	3	6	3	3	2	10
x_i	1	1	0	1	0	0	

Energieversorgung: Lösungsmethode

Idee: Abrunden, dann auffüllen – optimal?

i	1 	2 	3 	4 	5 	6 	$\sum$
c_i	7	5	9	4	2	1	17
a_i	4	3	6	3	3	2	12
x_i	1	1	0	1	0	1	

Energieversorgung: Lösungsmethode

Nein…

i	1 	2 	3 	4 	5 	6 	Σ
c_i	7	5	9	4	2	1	18
a_i	4	3	6	3	3	2	12
x_i	0	1	1	1	0	0	

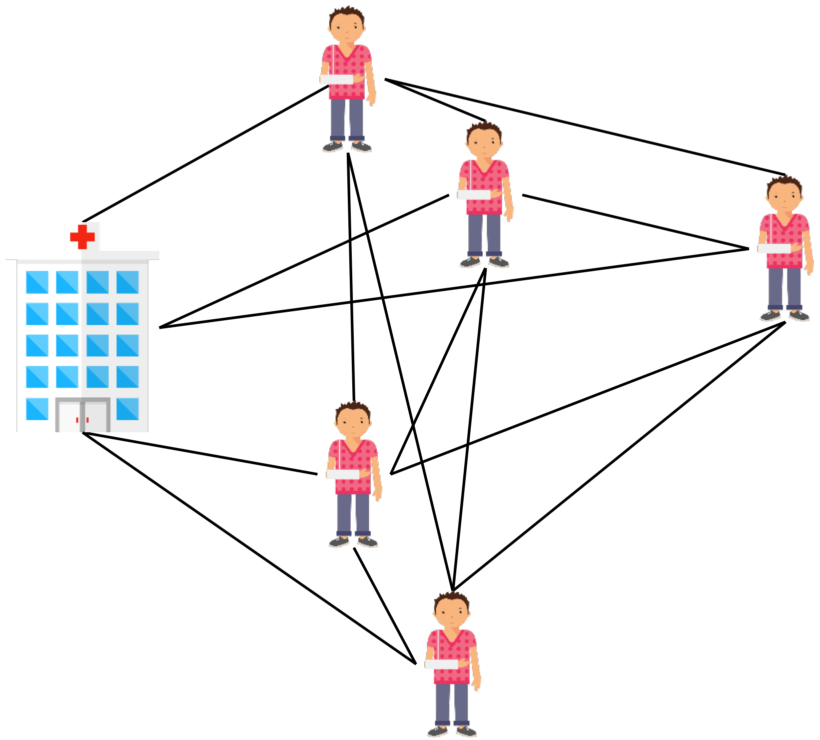
Mehr…

Optimale Rezeptierung von Tees

- Produktion von Teemischungen (= Rezeptierung) nach Kundenspezifikation
- Ziel: Finde eine Zuteilung der Rohstoffe auf die Aufträge, sodass Mischungs-verhältnis und Inhaltsstoffe bei jedem Auftrag dem Kundenwunsch entsprechen, und möglichst nachhaltig sind

Effizienter Krankentransport – Ein Tourenplanungsproblem

- Begrenzte Anzahl an Fahrzeugen und Fahrern
- Zeitdruck
- Minimale Wartezeiten für die Patienten
- Robust gegenüber eintretenden Notfällen



Optimierung von Energienetzen: Speicher

- Starke Schwankungen in der Produktion von erneuerbaren Energien
- Optimale Nutzung von Energie-speichern erforderlich